SUCCESSIONS RECURRENTS

Josep M. Brunat i Blay

Definicions i exemples

Les solucions d'una equació no sempre són nombres. Per exemple, si a l'equació $f'(x) = x$ la incògnita és f, les solucions són les funcions del tipus $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$. En les equacions recurrents les incògnites són *successions.* Una *equació recurrent* o *recurrència* és una equació

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}),$$

on f és una funció. El nombre k és l'*ordre* de la recurrència.
En són exemples les recurrències

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad a_n = n^2 + a_{n-1}$$
$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \cdots + na_1, \quad a_n = na_{n-1}a_{n-2}a_{n-3},$$

que tenen, respectivament, ordre $2, 1, n-1$ i 3.
Una *solució particular* és una successió $a_n = g(n)$ que compleix l'equació i la *solució general* és el conjunt de totes les successions que la satisfan.
Sovint interessa trobar l'única solució que té certs *valors o condicions inicials* $a_1 = c_1, a_2 = c_2, \dots, a_k = c_k$. (De vegades es comença a comptar la successió per 0 i els valors inicials són $a_0 = c_0, a_1 = c_1, \dots, a_{k-1} = c_{k-1}$).
Per exemple, l'equació d'ordre 2,

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},$$

té per solució general $a_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$, una solució particular és $a_n = 2^n + 3^n$ i la solució que té condicions inicials $a_1 = 14$ i $a_2 = 40$ és $a_n = 2^n + 4 \cdot 3^n$.

Una successió *doble* és una successió que té dos índexs variant a $\mathbb{N}$. Per exemple, la successió

$$b_{n,k} = \binom{n}{k}$$

depèn dels dos índexs naturals n i k. El concepte de *recurrència* es pot definir igualment:

$$a_{n,k} = f(n, k, a_{n-1,k}, a_{n,k-1}, \dots).$$

Per exemple, si $b_{n,k} = \binom{n}{k}$, es té la coneguda relació

$$b_{n,r} = b_{n-1,r-1} + b_{n-1,r} \quad \text{o bé} \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}.$$

Les condicions inicials són ara una o més successions. En l'exemple dels nombres combinatoris, són $b_{n,0} = 1$ per tot $n \in \mathbb{N}$, i $b_{0,r} = 1$ per tot $r \in \mathbb{N}$.
Es poden considerar també les *inequacions recurrents* $a_n \leq f(n, a_{n-1}, \dots)$. En aquest cas l'objectiu que es pretén és una fita del tipus $a_n \leq g(n)$.

Alguns mètodes de solució

Mètode d'inducció

Consisteix a conjecturar una solució i després provar per inducció que efectivament ho és.
Exemple: Una carpeta conté n fulls i en busquem un examinant-los consecutivament a partir del primer. Quina és la mitjana del nombre de fulls examinats?
Si e_i és aquesta mitjana per a i fulls, és evident que $e_1 = 1$. Si hi ha n fulls, el que busquem, o bé està entre els $n-1$ primers (i això té probabilitat $\frac{n-1}{n}$), o bé és l'últim (amb probabilitat $\frac{1}{n}$). Per tant tenim,

$$e_n = \frac{n-1}{n} e_{n-1} + n\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} e_{n-1} + 1, \qquad e_1 = 1.$$

Els primers termes són

$$e_1 = 2/2,\ e_2 = 3/2,\ e_3 = 4/2, \dots$$

i això ens suggereix que pot ser $e_n = \frac{n+1}{2}$. La demostració es fa després per inducció.

Mètode d'expansió (o d'iteració)

Consisteix a aplicar repetidament la recurrència fins a eliminar els termes de la successió.
Exemple: Una *progressió aritmètico-geomètrica* és aquella en què cada terme s'obté del precedent multiplicant-lo per una raó r i sumant després al resultat una diferència d. Trobeu el valor del terme enèsim a_n en funció de la raó, la diferència i a_1 i comproveu que la fórmula s'ajusta al cas de les progressions aritmètiques i al de les geomètriques.
Si la raó és r i la diferència d, tenim la recurrència $a_n = ra_{n-1} + d$. Iterant,

$$\begin{aligned} a_n &= ra_{n-1} + d = r(ra_{n-2} + d) + d = r^2 a_{n-2} + (1+r)d \\ &= r^2(ra_{n-3} + d) + (1+r)d = r^3 a_{n-3} + (1 + r + r^2)d = \dots \\ &= r^{n-1}a_1 + (1 + r + \cdots + r^{n-2})d \\ &= \begin{cases} r^{n-1}a_1 + \dfrac{1-r^{n-1}}{1-r}d & \text{si } r \neq 1 \\ a_1 + (n-1)d & \text{si } r = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Per $r = 1$ tenim la fórmula del terme general d'una progressió aritmètica i, per $d = 0$, d'una geomètrica.

Recurrències lineals

Una recurrència lineal d'ordre p té la forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p} + f(n),$$

on els c_i són coeficients donats i els valors inicials són $a_1, \dots a_p$. El *terme independent* és $f(n)$. Si és nul, diem que l'equació és *homogènia*.

Cas homogeni

Per trobar la solució general de la recurrència $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p}$, podem començar per veure si $a_n = \alpha^n$ és solució per algun valor de α. Substituint i simplificant tenim $\alpha^n - c_1\alpha^{n-1} - \cdots - c_p\alpha^{n-p} = 0$ o també $\alpha^p - c_1\alpha^{p-1} - \cdots - c_p = 0$, d'on resulta que α ha de ser una arrel de l'equació $x^p - c_1x^{p-1} - \cdots - c_p = 0$. Aquesta equació s'anomena *equació característica* de la recurrència lineal i permet de resoldre completament la recurrència. En efecte, es pot demostrar:

• *La solució general d'una recurrència lineal homogènia té una expressió que és una suma de tants sumands com arrels diferents té l'equació característica. El sumand corresponent a una arrel α de multiplicitat k és*

$$(\lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2 + \cdots + \lambda_k n^{k-1})\alpha^n.$$

Imposant els valors inicials es calculen els valors dels λ_i.

Exemple: Considerem la recurrència $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$. L'equació característica és $x^2 - 5x + 6 = 0$, que té dues arrels diferents 2 i 3. Per tant, la solució general és $a_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$. Si els valors inicials són $a_1 = 14$ i $a_2 = 40$, plantegem el sistema $14 = \lambda 2 + \mu 3$, $40 = \lambda 4 + \mu 9$ que té solució $\lambda = 1$ i $\mu = 4$. La successió cercada és $a_n = 2^n + 4 \cdot 3^n$.

Exemple: L'equació recurrent $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ té equació característica $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$ o bé $(x-2)^3 = 0$. Hi ha l'arrel triple 2. Per tant, la solució general és $a_n = (\lambda + \mu n + \nu n^2)2^n$.

Exemple: L'equació recurrent $a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3}$ té equació característica $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ o bé $(x+3)(x-2)^2 = 0$ que té l'arrel simple -3 i l'arrel doble 2. L'arrel simple contribueix a la solució general amb $\lambda(-3)^n$ i l'arrel doble amb $(\mu + \nu n)2^n$, i la solució general és $a_n = \lambda(-3)^n + (\mu + \nu n)2^n$.

Exemple: L'equació recurrent $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ té equació característica $x^2 - 2x + 2 = 0$ que té les dues arrels diferents complexes conjugades $\alpha_1 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$ i $\alpha_2 = 1 - i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 - i\sin\pi/4)$. La solució general serà $a_n = \lambda\alpha_1^n + \mu\alpha_2^n$. Però si volem expressar-la en termes reals, hem d'observar que λ i μ han de ser conjugats i per tant de la forma $\lambda = A + Bi$, $\mu = A - Bi$. Substituint a la solució general, i tenint present que $(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)^n = \cos n\pi/4 + i\sin n\pi/4$, resulta $a_n = (\sqrt{2})^n\Big(2A\cos n\pi/4 - 2B\sin n\pi/4\Big)$ que és la solució general real.

Cas no homogeni

L'equació homogènia associada a una recurrència lineal

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p} + f(n)$$

és l'equació

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p}.$$

Per tal de resoldre-la, cal tenir present que

• *La solució general d'una recurrència no homogènia s'obté sumant a una de les seves solucions particulars la solució general de l'homogènia.*

Per tant, el problema queda reduït a trobar una solució particular de l'equació no homogènia. Aquestes solucions particulars s'endevinen astutament. Freqüentment, un bon camí és el següent.

a) Calcular el polinomi característic $p(x)$ de l'equació homogènia associada.

b) Buscar una recurrència homogènia que admeti la solució particular $f(n)$; diguem $q(x)$ al seu polinomi característic.

c) Escriure la solució general de la recurrència homogènia associada a $p(x)q(x)$.

d) De la solució general obtinguda a c), suprimir els sumands que corresponen a $p(x)$.

e) El resultat obtingut és un bon candidat a solució particular de l'equació no homogènia.

Exemple: Equació no homogènia: $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2^n - 1$. L'homogènia associada és $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$ i $p(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$. De l'expressió $2^n - 1 = 2^n - 1 \cdot 1^n$ deduïm que $q(x) = (x-2)(x-1)$, de forma que $p(x)q(x) = (x+3)(x-2)^2(x-1)$. Això dóna la solució $b_n = \alpha(-3)^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n + \delta 1^n$. Suprimint la part corresponent a $p(x)$ queda com a candidat que cal assajar $c_n = \gamma n 2^n + \delta$. Substituint a l'equació original dóna $\gamma = 2/5$ i $\delta = 1/4$. Una solució particular és, doncs, $c_n = \frac{2}{5} n 2^n + \frac{1}{4}$. La solució general de l'homogènia és $h_n = \lambda_1 3^n + \lambda_2(-2)^n$. Per tant, la solució general cercada és

$$a_n = \frac{2}{5} n 2^n + \frac{1}{4} + \lambda_1 3^n + \lambda_2(-2)^n.$$

Exemple: Trobar una fórmula tancada $s_n = g(n)$ per

$$s_n = \sum_1^n k^2.$$

És evident que $s_n = s_{n-1} + n^2$ i $s_1 = 1$. Tenim, doncs, una equació lineal de terme independent n^2. L'homogènia associada és $s_n = s_{n-1}$ que dóna lloc a $p(x) = x - 1$. Com que $n^2 = n^2 \cdot 1^n$ resulta que $q(x) = (x-1)^3$ i $p(x)q(x) = (x-1)^4$ que genera les solucions $b_n = \delta 1^n + \gamma n 1^n + \beta n^2 1^n + \alpha n^3 1^n$. Suprimint la part que correspon a $p(x)$ queda $\gamma n + \beta n^2 + \alpha n^3$ i substituint a l'equació original queda $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/2$ i $\gamma = 1/6$ d'on la solució general és $s_n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} + c1^n$. Imposant $s_1 = 1$ resulta $c = 0$ i obtenim la coneguda fórmula

$$\sum_1^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Remarca

En un producte de n factors, de quantes maneres a_n es poden posar parèntesis agrupant tots els factors? Evidentment, $a_1 = a_2 = 1$. Per $n = 3$, hi ha dues formes que corresponen a les dues maneres de calcular el producte, $(x_1(x_2x_3))$ i $((x_1x_2)x_3)$. Podeu comprovar que $a_4 = 5$ i amb una mica de reflexió, arribar a la recurrència

$$a_n = a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_1,$$

per a la qual no serveixen les tècniques anteriors perquè no és lineal. La tècnica de les funcions generadores (vegeu les referències) és un altre mètode per resoldre recurrències. Per exemple, permet obtenir la solució

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

per a la recurrència anterior.
D'altra banda, en molts casos s'està més interessat en poder calcular els termes d'una successió a_n que en una fórmula del tipus $a_n = g(n)$. Llavors n'hi ha prou amb conèixer els valors inicials i establir la recurrència.

Problemes

SR1.–En cada cas, escriviu els sis primers termes de la successió que compleix la recurrència donada, formuleu una solució hipotètica i proveu-la per inducció:
a) $x_1 = 2, \quad x_n = x_{n-1} + 2n.$
b) $u_1 = 3, \quad u_2 = 5, \quad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}.$

SR2.–Considereu la recurrència amb dos índexs

$$a_{0,0} = 1, \quad a_{n,k} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ o } k > n, \quad a_{n,k} = \frac{1}{2}(a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k}) \text{ altrament.}$$

Calculeu uns quants $a_{n,k}$, conjectureu una fórmula, i proveu-la per inducció.

SR3.–Resoleu per iteració la recurrència $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta^n$.

SR4.–Quantes multiplicacions o divisions cal fer, en el pitjor dels casos, per a triangular una matriu $n \times n$?

SR5.–S'estima que la facturació d'una empresa és cada any la mitjana entre la de l'any anterior i la de l'any següent. Si les vendes el 1990 són v_0 i el 1991 són v_1, es demanen les vendes de l'any $1990 + n$.

SR6.–El joc de les torres de Hanoi consta de tres pals verticals A, B i C i de n discs de radis diferents que, al principi, són apilats de gran (sota) a petit (dalt), travessats pel pal A. L'objectiu és col·locar la pila en idèntica posició però al pal B. L'única jugada permesa és passar el disc més alt d'una pila a la posició superior d'una altra pila, sense cobrir, però, un disc més petit. Trobeu una relació recurrent per al nombre mínim de jugades necessàries per completar el joc i resoleu-la.

SR7.–Segons es diu, el rei King Shirham de l'Índia volgué recompensar el seu Gran Visir SissaBen Dahir per inventar el joc dels escacs i li demanà quin premi volia. El Visir contestà: "dona'm un gra de blat pel primer quadrat, dos pel segon, quatre pel tercer, vuit pel quart, etc. fins acabar amb tots els quadrats del tauler". Cas de satisfer la demanda, quants grans de blat li hauria donat el rei al visir?.

SR8.–En el pla hi ha dos punts pintats de groc i r punts pintats de verd. Només es permet dibuixar segments que tenen per extrems punts de diferents colors.

a) Proveu que el nombre mínim de segments que cal dibuixar per tal que tots els punts quedin connectats és $r+1$.

b) De quantes maneres diferents es poden dibuixar $r+1$ segments de forma que tots els punts quedin connectats?

SR9.–De quantes maneres es pot enrajolar un passadís rectangular de mides $2 \times n$ si es disposa de rajoles de mides 2×1 i 2×2 i no es poden trencar rajoles?

SR10.–D'una parella de conills neix, a la fi de cada mes, una altra parella. Aquesta farà néixer una altra parella a la fi de cada mes (a partir del segon mes), i així successivament. Si no hi ha defuncions, quantes parelles tindrem n mesos després? *(Problema de Fibonacci).*

SR11.–Un sistema permet d'emetre tres senyals diferents, un dels quals dura un segon i, els altres, dos segons cadascun. Trobeu el nombre de seqüències de senyals diferents que es poden emetre en n segons suposant que no hi ha cap temps mort entre cada dos senyals.

SR12.–Tot resolent cert problema, es diu que una persona és al nivell n quan li falten n etapes per arribar a la solució. A cada nivell té 5 alternatives, dues que el porten al nivell $n-1$ i tres que són millors, en el sentit de que el porten directament al nivell $n-2$. Sigui a_n el nombre de maneres d'arribar a la solució des del nivell n. Trobeu a_n sabent que $a_1=2$.

SR13.–Trobeu el nombre de maneres diferents de pujar una escala de n graons si en cada pas en pugem un o dos.

SR14.–Considereu les paraules de longitud n amb símbols de l'alfabet $\{0,1,2\}$.

a) Quantes paraules tenen els dígits cadascun igual o superior a l'anterior?

b) Quantes paraules són cap-i-cua?

SR15.–Trobeu el nombre de paraules de longitud k que es poden fer emprant l'alfabet $\{0,1,2,3\}$ que tinguin un nombre parell de zeros.

SR16.–Considerem les successions ternàries de longitud n.

a) Quantes n'hi ha que continguin dos símbols consecutius iguals?

b) A quantes d'elles no hi ha ni dos uns consecutius ni dos dosos consecutius?

SR17.–Considerem n rectes al pla en posició general (dues a dues no paral·leles, tres a tres no concurrents).

a) En quantes regions queda dividit el pla?

b) Quantes d'aquestes regions són no fitades?

SR18.–Voleu pintar els costats d'un polígon regular de n vèrtexs de forma que costats contigus tinguin colors diferents. Disposeu d'una caixa de k colors. De quantes maneres ho podeu fer? (Indicació: Numereu els costats consecutivament, $1,2,\ldots,n$ i considereu separadament les coloracions en què 1 i 3 es pinten del mateix color i les que no).

SR19.–Sumeu l'expressió següent,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2).$$

SR20.–Sigui a un nombre real i n un enter positiu. Calculeu,

$$a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n.$$

SR21.–Sigui $\lambda(n,k)$, on $n \geq 1$, el nombre de k-subconjunts de $\{1,2,3,\ldots,n\}$ que no contenen dos enters consecutius.

a) Demostreu que $\lambda(n,k) = \lambda(n-1,k) + \lambda(n-2,k-1)$ per tot $n \geq 3$.

b) Proveu que per tot $n \geq 1$ i $0 \leq k \leq n$,

$$\lambda(n,k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

c) Calculeu el nombre $\mu(n,k)$ de maneres d'escollir k persones d'entre n assegudes en una taula rodona sense agafar-ne dues de veïnes.

SR22.–Teniu n objectes situats cada un al seu lloc. Sigui d_n el nombre de formes de desar les coses de forma que no n'hi hagi cap al seu lloc. Calculeu d_1, d_2 i d_3 i establiu una recurència per d_n.

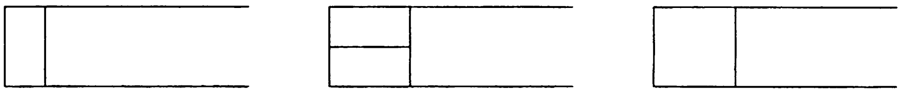
SR23.–Sigui t_n el nombre de formes de dividir en triangles un polígon regular de n costats mitjançant diagonals que no es tallin. Comproveu que $t_3 = 1, t_4 = 2, t_5 = 5$ i establiu una recurrència per t_n.

Mostra de solucions

Solució del problema SR9

Podem començar a enrajolar en una de les tres formes següents:

Cas 1 Cas 2 Cas 3



1 $n-1$ 2 $n-2$ 2 $n-2$

En el cas 1 queda per enrajolar un passadís $2 \times (n-1)$ que es pot fer de u_{n-1} maneres. En els casos 2 i 3 queda per enrajolar un passadís de $2 \times (n-2)$ que es pot fer de u_{n-2} maneres. Per tant

$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$$

que té solució general $u_n = A\,2^n + B\,(-1)^n$.
Les condicions inicials són $u_1 = 1$ i $u_2 = 3$ i això ens dóna

$$u_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n.$$

Solució del problema SR14

a) Les paraules considerades són de la forma

$$\underbrace{00\ldots0}_{x_0}\underbrace{11\ldots1}_{x_1}\underbrace{22\ldots2}_{x_2}$$

que es poden identificar amb successions

$$\underbrace{aa\ldots a}_{x_0}\,s\,\underbrace{aa\ldots a}_{x_1}\,s\,\underbrace{aa\ldots a}_{x_2}$$

on a designa una lletra de l'alfabet i s designa el "canvi de lletra". El nombre d'aquestes successions és

$$\binom{n+2}{2}.$$

b) Sigui a_n el nombre de cap-i-cues de longitud n. Tot cap-i-cua té als extrems el mateix dígit (0, 1 o 2), i si els suprimim, obtenim un cap-i-cua de longitud $n-2$. Així, $a_n = 3a_{n-2}$. Com que $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, resulta

$$a_n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\right)^n + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\left(-\sqrt{3}\right)^n.$$

Observació: Una altra solució sense emprar recurrències dóna

$$a_n = 3^{n/2} \quad \text{si } n \text{ és parell}$$
$$a_n = 3^{(n+1)/2} \quad \text{si } n \text{ és senar}$$

Una fórmula que agrupa els dos casos és

$$a_n = 3^{[(n+1)/2]}.$$

Solució del problema SR20

Si $a = 0$, llavors $a_n = 0$ per tot n.
Si $a = 1$, llavors $a_n = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.
Primer mètode:
En tot el que segueix podem suposar $a \neq 0, 1$. Es demana la resolució de la recurrència

$$a_n = a_{n-1} + n\,a^n$$

amb valors inicials $a_1 = a$, $a_0 = 0$. La recurrència homogènia associada és $a_n = a_{n-1}$, de polinomi característic $p(x) = x - 1$, i que té solució $h_n = \alpha$. El polinomi característic d'una recurrència que admeti la solució particular $f(n) = n\,a^n$ és $q(x) = (x-a)^2$. La solució general de la recurrència homogènia associada a $p(x)q(x) = (x-1)(x-a)^2$ és de la forma $\delta + (\beta n + \gamma)a^n$. Suprimint δ, que és la part que prové de $(x-1)$, obtenim $p_n = (\beta n + \gamma)a^n$, com a candidat a solució particular. Imposem la recurrència:

$$(\beta n + \gamma)a^n = \big(\beta(n-1) + \gamma\big)a^{n-1} + n\,a^n.$$

Com que $a \neq 0$, resulta

$$(\beta n + \gamma)a = (\beta n - \beta + \gamma) + na$$

o sigui

$$(\beta a - \beta - a)n + \gamma a + \beta - \gamma = 0.$$

que dóna lloc al sistema $\beta(a-1) - a = 0$, $\gamma(a-1) + \beta = 0$ que té solució $\beta = a/(a-1)$ i $\gamma = -a/(a-1)^2$. La solució buscada és, doncs, de la forma

$$a_n = \alpha + \Big(\frac{a}{a-1}n - \frac{a}{(a-1)^2}a^n\Big).$$

Per $n = 0$ resulta $\alpha = a/(a-1)^2$ i finalment queda

$$a_n = \frac{a}{(a-1)^2} + \left(\frac{a}{a-1}n - \frac{a}{(a-1)^2}a^n\right).$$

Segon mètode:

Tenim que

$$\begin{aligned} a_n &= a + 2a^2 + \cdots + na^n \\ a\,a_n &= \phantom{a + {}} a^2 + \cdots + (n-1)a^n + n\,a^{n+1}, \end{aligned}$$

i restant queda

$$(1-a)a_n = a + a^2 + \cdots + a^n - n\,a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - a}{a-1} - n\,a^{n+1}$$

i, com que $a \neq 1$, la solució és

$$a_n = \frac{1}{1-a}\left(\frac{a^{n+1} - a}{a-1} - n\,a^{n+1}\right).$$